АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи
УДК 517.95

ТКАЧЕВ Владимир Геннадьевич

ВНЕШНЕЕ СТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.01 - математический анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 1990

Работа выполнена на кафедре геометрии и анализа Волгоградского государственного университета.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.М.Миклюков

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук А.П.Копылов,

кандидат физико-математических наук, доцент С.К.Водопьянов.

Ведущая организация - Институт прикладной математики и механики АН УССР.

Защита состоится "30" мая 1990 г. в 16 час. на заседании специализированного совета К 002.23.02 в Институте математики СО АН СССР (630090, Новосибирск, Университетский проспект, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО АН СССР.

Автореферат разослан "29" апреля 1990 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.ф.-м.н.,доцент В.В.Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В исследованиях последних десятилетий была отмечена глубокая связь между классическими проблемами теории функций и внешней геометрией римановых многообразий, погруженных в евклидово пространство. Один из основных классов задач относится к минимальным поверхностям и поверхностям заданной средней кривизны и рассматривается в работах Ю.А.Аминова, А.А.Борисенко, Э.Калаби, В.Миикса, В.М.Миклюкова, Р.Оссермана, И.Х.Сабитова, Р.Финна, А.Т.Фоменко и других советских и зарубежных математиков. Ключевым вопросом во многих исследованиях является задача определения конформного типа погружаемого многообразия и тесно связанная с ним проблема описания пространства субгармонических функций на многообразии.

Дж.Милнором [1] поставлена проблема определения конформного типа поверхности через её внешние и внутренние характеристики. Хорошо известно, что односвязная открытая двумерная поверхность конформно эквивалентна либо плоскости, либо открытому кругу, т.е. имеет параболический или гиперболический конформный тип соответственно. В многомерном случае подобная классификация представляется затруднительной, но понятие типа поверхности может быть продолжено посредством введения таких понятий как α-емкость или α-модуль. Изучению емкостных методов посвящены работы Ю.Г.Решетняка, С.К.Водопьянова, В.М.Гольдштейна, А.А.Григорьяна, В.А.Зорича, А.П.Копылова, Л.Сарио и других ма-

---

1) Milnor J. On deciding whether a surfaces are parabolic or hyperbolic// Amer.Math.Month. 1977.- V.84,N1.- P.43-46.

тематиков.

Калаби [2] поставил проблему: существуют ли полные двумерные минимальные поверхности в $\mathbb{R}^3$, содержащиеся в полупространстве (слое, шаре)? Для внешне полных поверхностей, т.е. поверхностей задаваемых посредством собственного погружения, ответ отрицателен, как следует из недавней работы Миикса и Хоффмана[3]. С другой стороны, Йорге и Ксавье [4] построили пример внутренне полной минимальной поверхности, отличной от плоскости, расположенной в слое между параллельными плоскостями в $\mathbb{R}^3$. Тем не менее в размерности три и выше существуют нетривиальные минимальные поверхности вращения, расположенные между параллельными гиперплоскостями. Поэтому в многомерном случае и случае высокой коразмерности погружения, проблема Калаби связана с необходимостью дополнительных ограничений на геометрическое строение таких поверхностей.

Особое место в указанных построениях занимает непараметрический случай. Известная теорема С.Н.Бернштейна утверждает, что график минимальной поверхности в , заданной над всей плоскостью есть плоскость. Оказывается [5], что в такой форме теорема

---

[2] Milnor J. On deciding whether a surfaces are parabolic or hyperbolic// Amer.Math.Month.- 1977.- V.84, N1.- P.43-46.

[3] Hoffman D., Meeks W.H. The global theory of properly embedded minimal surfaces// Technical Rep. DOE/ER/25015-3/Prepr.

[4] Jorge L., Xavier F. A complete minimal surfaces in R^3 between two parallel planes// Ann.Math.-1980.-V.112.-P.203-206.

[5] Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds// Ann.Math.- 1968.- V.88, N1. - P. 62-105.

остается верной лишь до размерности $n=7$, и при $n \geq 8$ существуют отличные от гиперплоскости минимальные гиперповерхности, однозначно определенные над всем $\mathbb{R}^n$. В случае же когда поверхность имеет отличную от нуля постоянную среднюю кривизну $H>0$, известно, например, что поверхность не может лежать над кругом радиуса более чем $\frac{1}{H}$.

Цель работы - исследование проблемы параболичности типа поверхностей предписанной средней кривизны в $\mathbb{R}^n$, применение найденных признаков к изучению строения в целом минимальных поверхностей и их гауссова отображения.

Методика исследования. В работе применяется модульно-ёмкостная техника оценок решений эллиптических уравнений, обобщающих уравнение средней кривизны. Широко используется аппарат ковариантной производной для вычисления геометрических характеристик погружения.

Научная новизна. Следующие результаты диссертации являются новыми.

I. Доказаны различные достаточные условия параболичности и гиперболичности типа погруженного в $\mathbb{R}^n$ многообразия заданной средней кривизны в терминах роста функции кратности проекции поверхности на фиксированные подмножества $\mathbb{R}^n$.

II. Доказаны утверждения о строении предельного множества гауссова образа минимальной поверхности параболического типа. Приведены также некоторые оценки для протяженности трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности.

III. Определен класс целых решений уравнения типа средней кривизны и доказаны точные количественные оценки роста средней

кривизны таких решений в различных областях из $\mathbb{R}^n$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на XXII Всесоюзной научной студенческой конференции (г. Новосибирск, 1984 г.), Всесоюзной конференции по геометрической теории функций (г. Новосибирск, 1988 г.), на научных семинарах МГУ и Харьковского госуниверс тета (январь, апрель 1989 г.), Новосибирского госуниверситета (ноябрь 1989 г.), Всесоюзной научной конференции по геометрическим методам в теории функций (г. Новосибирск, 1989 г.). Все результаты докладывались на семинаре по нелинейному анализу Волгоградского университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [6].

Содержание диссертации. В главе I излагаются необходимые определения и предварительные утверждения. Особое место занимают предложения I.3, I.5 и I.6, связывающие конформные характеристики погруженного многообразия со свойствами класса субгармонических функций на нем. Дадим необходимые определения.

Для двух замкнутых непересекающихся подмножеств P и Q из M и $\alpha \geq 1$ определим α-емкость конденсатора (P,Q) полагая

$$\mathrm{cap}_\alpha(P,Q) = \inf \int_M |\nabla\varphi|^\alpha dM,$$

где $\nabla\varphi$ - градиент функции φ в метрике многообразия M и инфимум берется по всевозможным липшицевым на M функциям φ с компактным носителем, равным 1 на P, и 0 на Q. Многообразие M называется α-параболическим, если для любого компакта $P \subset M$ существует исчерпание $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M открытыми множества: $A_k \subset A_{k+1}$, $A_k \supset P$ с компактными

замыканиями, т.ч. $M=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и выполнено

$$\lim_{k\to\infty} cap_\alpha(P, M\setminus A_k) = 0. \qquad (I)$$

В случае $\alpha=2$ условимся говорить просто о параболичности типа многообразия. Если же соотношение (I) не имеет места, то M имеет гиперболический тип.

В главе приводятся основные утверждения, устанавливающие достаточные признаки параболичности и гиперболичности типа погруженного в $\mathbb{R}^n$ многообразия со слабо растущей средней кривизной и некоторые геометрические следствия для минимальных поверхностей.

Пусть $x: M\to\mathbb{R}^n$ - погружение класса C^2. Тогда имеет место

Теорема 2.I. Пусть $(M;x)$ - p-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с вектором средней кривизны $H(m)$ и $p\geq 3$. Тогда, если

$$\sup_{m\in M} |\langle x(m); H(m)\rangle| < \frac{p-2}{p}, \qquad (2)$$

то поверхность (M, x) имеет гиперболический тип.

Пример, обсуждаемый в следующем пункте, показывает, что приводимое утверждение является точным. А именно, в случае равенства в (2) существуют отличные от плоского $(n-1)$-мерные вложенные в $\mathbb{R}^n$ многообразия, имеющие параболический тип.

Раздел 2.3 посвящен двумерным минимальным поверхностям в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^n$, для которых вводится понятие кратности проекции относительно фиксированных множеств: плоскости - $\mathcal{N}_V(v)$ и сферы - $\mathcal{N}_S(R)$ - соответственно. Для плоскости $V\subset\mathbb{R}^3$ и произвольной точки $v\in V$ обозначим через $\mathcal{N}_V(v)$ - число точек пересечения (с учетом кратности) прямой, проходящей через v

ортогонально V. Справедлива

Теорема 2.2. Пусть (M, x) - внешне полная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что для фиксированной плоскости $V \subset \mathbb{R}^3$ множество $x(M)$ не пересекается с поверхностью, задаваемой графиком некоторой непрерывной функции относительно V и выполнено условие

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R \ln R} \int_{|v|=R} N_V(v) \cdot |dv| = 0. \tag{3}$$

Тогда (M, x) имеет параболический тип.

Пусть G_n^k - грассманово многобразие k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат и $d\Gamma_k$ - единственная мера Хаара на G_n^k, нормированная условием

$$\int_{G_n^k} d\Gamma_k = 1.$$

Пусть (M, x) - двумерная внешне полная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Для фиксированной $(n-2)$-мерной плоскости $\gamma \in G_n^{n-2}$ и произвольного $R > 0$, обозначим через $N(R, \gamma)$ - число точек пересечения γ с частью образа $x(M)$, лежащей внутри шара радиуса R с центром в нуле. Положим

$$N_S(R) = \int_{\gamma \in G_n^{n-2}} N(R, \gamma)\, d\Gamma_{n-2}(\gamma).$$

В сделанных предположениях имеет место

Теорема 2.3. Пусть (M, x) - двумерная внешне полная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с вектором средней кривизны $H(m)$, удовлетворяющим неравенств

$$\sup_{m\in M} |x(m)|^{\varepsilon} \cdot |\langle x(m), H(m)\rangle| < +\infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Пусть также выполнено

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{\ln^2 R} \int_r^R N_s(t)\,\frac{dt}{t} = 0. \qquad (4)$$

Тогда (M, x) имеет параболический тип.

В п. 2.3 рассматриваются непосредственные следствия из сформулированных выше утверждений и результатов главы I. Приведем

Следствие I. Пусть (M, x) - двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$, для которой выполнено условие (4). Если существует гиперплоскость Π такая, что $\Pi \cap x(M) = \varnothing$, то $x(M)$ содержится в некоторой гиперплоскости Π_1, параллельной Π.

В п. 2.4 вводится характеристика $J(a, z)$, определенная для $a > 0$, $z \in V$ для двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$, в предположении, что отображение проекции поверхности на некоторую двумерную плоскость $V \equiv \mathbb{R}^2$ является собственным. Для таких поверхностей величина $J(a, z)$ естественным образом обобщает понятие кратности проекции для гиперслучая, введенное выше и удовлетворяет неравенству, из которого вытекает, что порядок роста $J(a, z)$ по z на самом деле не зависит от значений параметра a. В соответствии со сказанным, назовем (M, x) поверхностью с характеристикой слабого роста, если для некоторого $a_0 > 0$ (а значит и для любого $a > 0$) для функции

$$\eta(t) = \sup_{|z|\le t} \frac{1}{\pi a_0} J(a_0, z),$$

имеет место расходимость интеграла

$$\int_{2a_0}^{+\infty} \frac{dt}{t\eta(t)} = +\infty$$

Справедлива

Теорема 2.4. Двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с характеристикой слабого роста имеет параболический тип.

В п. 2.5 обсуждается пример двумерной внешне полной минимальной поверхности в $\mathbb{R}^n$ имеющей гиперболический конформный тип. Простым следствием этого примера является тот факт, что в $\mathbb{R}^6$ существуют внешне полные минимальные поверхности, заключенные между двумя параллельными гиперплоскостями, и отличные от двумерной плоскости. Из наличия таких поверхностей вытекает недостаточность требования внешней полноты для распространения теоремы Миикса и Хоффмана [3] на случай большой коразмерности.

Глава 3 посвящена минимальным поверхностям трубчатого типа и строению гауссова образа таких поверхностей. Поверхность (M, x) называется трубчатой [6], если существует прямая $\ell \equiv \mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$ для которой сечение $\Sigma_\ell(t)$ любой гиперплоскостью Π_t, $t \in \ell$ ортогональной ℓ, образа $x(M)$ является компактным или пустым множеством. Положим $\Delta(M)$ - полный интервал проекции поверхности (M, x) на прямую ℓ, т.е. множество тех $t \in \mathbb{R}^1$, для которых $\Sigma_\ell(t)$ не пусто. Будем также всегда предполагать, что всякая часть множества $x(M)$, заключенная между двумя параллельными гиперплоскостями, проходящими через интервал $\Delta(M)$ ортогонально ℓ, является компактной. Введем

---

[6] Веденяпин А.Д., Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных гиперповерхностей// Матем.сборник - 1986.- Т.131, № 2(10). - С.240-250.

$$\int_{2a_0}^{+\infty} \frac{dt}{t\eta(t)} = +\infty$$

Справедлива

Теорема 2.4. Двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с характеристикой слабого роста имеет параболический тип.

В п. 2.5 обсуждается пример двумерной внешне полной минимальной поверхности в $\mathbb{R}^n$ имеющей гиперболический конформный тип. Простым следствием этого примера является тот факт, что в $\mathbb{R}^6$ существуют внешне полные минимальные поверхности, заключенные между двумя параллельными гиперплоскостями, и отличные от двумерной плоскости. Из наличия таких поверхностей вытекает недостаточность требования внешней полноты для распространения теоремы Миикса и Хоффмана [3] на случай большой коразмерности.

Глава 3 посвящена минимальным поверхностям трубчатого типа и строению гауссова образа таких поверхностей. Поверхность (M, x) называется трубчатой [6], если существует прямая $\ell \equiv \mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$ для которой сечение $\Sigma_\ell(t)$ любой гиперплоскостью Π_t, $t \in \ell$ ортогональной ℓ, образа $x(M)$ является компактным или пустым множеством. Положим $\Delta(M)$ - полный интервал проекции поверхности (M, x) на прямую ℓ, т.е. множество тех $t \in \mathbb{R}^1$, для которых $\Sigma_\ell(t)$ не пусто. Будем также всегда предполагать, что всякая часть множества $x(M)$, заключенная между двумя параллельными гиперплоскостями, проходящими через интервал $\Delta(M)$ ортогонально ℓ, является компактной. Введем

[6] Веденяпин А.Д., Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных гиперповерхностей// Матем.сборник - 1986.- Т.131, № 2(10). - С.240-250.

функцию радиуса обхвата трубчатой поверхности, положив

$$\rho(t) = \sup_{m \in \Sigma_\ell(t)} \left(|x(m)|^2 - \langle x(m), \ell \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

и ρ_0 - наименьший радиус обхвата: $\rho_0 = \inf_{\Delta(M)} \rho(t)$.

Класс трубчатых минимальных поверхностей введен В.М.Миклюковым (см. [6]) и является самым простым в конструктивном отношении, для которого вычислены точные конформные характеристики. Мы распространяем некоторые утверждения из [6] на случай высокой коразмерности.

Теорема 3.2. Пусть (M, x) - трубчатая p-мерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с интервалом проекции $\Delta(M)$ и $p \geq 3$. Тогда $\Delta(M)$ - конечный интервал $(a; b)$ длины

$$\text{дл.}\,\Delta(M) = b - a \leq 2\rho_0 (p-1)^{\frac{p-1}{p-2}} / (p-2),$$

где ρ_0 - наименьший радиус обхвата.

Установлены также количественные оценки скорости роста функции радиуса обхвата $\rho(t)$ для двумерных минимальных поверхностей произвольной коразмерности. В предложениях 2.2 и 2.3 доказывается, что функция радиуса обхвата $\rho(t)$ логорифмически выпукла, т.е. $\ln \rho(t)$ и $\ln(\rho^2(t) + t^2)$ являются выпуклыми для $n=3$ и $n \geq 4$ соответственно. Для поверхностей трубчатых в целом, т.е. когда $\Delta(M) = \mathbb{R}^1$ выполнено соотношение

$$\varliminf_{|t| \to \infty} \rho(t) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \cdot \frac{t}{\rho_0} \right) > \frac{\rho_0}{\lambda},$$

где $\lambda = 1{,}15$ - некоторая постоянная не зависящая от n.

В данном пункте затрагивается также близкое к понятию трубчатости, понятие ленты. А именно, лентой называется трубчатая относительно прямой ℓ поверхность с непустым краем ∂M

вдоль которого выполнено дополнительное условие:

$$\langle \nu(m), \ell \rangle = 0 \quad , \quad m \in \partial M$$

Для минимальных лент остаются справедливыми некоторые утверждения верные для трубчатых поверхностей. Так например, минимальная лента в целом имеет параболический тип.

В п. 3.3 вводится понятие гауссова отображения поверхности в $\mathbb{R}^n$, как соответствие, ставящее каждой точке m касательное пространство $T_m M$, отождествленное с элементом m^* грассманиана G_n^2. Обозначим через $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ - угол между двумя плоскостями $\gamma_1, \gamma_2 \in G_n^2$ и определим экватор G_n^2 с полюсом γ_1 как множество $\{ \gamma_2 \in G_n^2 : \theta(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2} \}$.

Справедлива

Теорема 3.4. Пусть (M, x) - двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ параболического типа. Тогда замыкание гауссова образа $\overline{M^*}$ пересекается с любым экватором G_n^2, или

$$\inf_{\gamma_1 \in G_n^2} \sup_{\gamma_2 \in M^*} \theta(\gamma_1, \gamma_2) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\mathcal{D}$ - неограниченное открытое связное подмножество многообразия M, такое что $\partial \mathcal{D}$ - компакт. Назовем такое множество кольцевым концом, если оно гомеоморфно проколотому кругу и рассмотрим произвольно исчерпание $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ конца $\mathcal{D}$ семейством множеств $A_k \subset A_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathcal{D}$ с компактными замыканиями. Тогда

$$A(\mathcal{D}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{(\mathcal{D} \setminus A_k)^*} \; -$$

не зависит от выбора исчерпания и называется предельным множеством конца в грассманиане. Имеет место

Теорема 3.5. Пусть (M, x) - двумерная минимальная поверхность и $\mathcal{D} \subset M$ - конец параболического типа. Тогда

(а) либо $A(\mathcal{D})$ пересекается с любым экватором G_n^2;

(б) либо $A(\mathcal{D})$ состоит из единственной точки $\gamma \in G_n^2$.

Если кроме того $\mathcal{D}$ является трубчатой поверхностью относительно прямой ℓ, то в случае (б) имеет место равенство

$$\theta(\ell;\gamma)=\frac{\pi}{2}.$$

Глава 4 посвящена случаю неларметрического задания поверхности, т.е. когда поверхность (M,x) имеет вид графика функции $x_{n+1}=f(x_1,\dots,x_n)=f(x)$. Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\sqrt{1+|\nabla f|^2}\right)=n\cdot H(f(x)),\quad x\in\Omega \qquad (5)$$

где Ω - область в $\mathbb{R}^n$ и $H(t)$ - непрерывная неубывающая функция одного переменного. Известны различные результаты, касающиеся частных случаев (5), когда $H(t)=at+b$ и a,b - постоянные числа, т.ч. $a>0$ [7]. Ченг и Яу [8] доказали, что при условии знакопостоянства $H(t)$ и при выполнении $H'(t)\geq 0$, любое решение уравнения (5) определенное в целой плоскости $\mathbb{R}^2$ должно быть линейной функцией. В п.4.I доказывается более общее утверждение, справедливое для целого класса уравнений типа средней кривизны. А именно, пусть $A(x;\xi)=(A_1(x;\xi),\dots,A_n(x;\xi))$ - есть C^2-вектор-функция, определенная на $\Omega\times\mathbb{R}^n$, для которой выполнено

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^2(x;\xi)\leq 1,$$

---

[7] Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности.- М.: Мир, I989.- 264 с.

[8] Cheng S.Y., Yau S.T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm.Pure & Appl. Math. - 1975.- V.28, N3. - P. 333-354.

и $\sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x;\xi) \geq 0.$

Тогда справедливо

Следствие 4.I. Пусть $f(x)$ - решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x;\nabla f(x)) = n \cdot H(f(x)),$$

определенное всюду в $\mathbb{R}^n$, за исключением, быть может, множества P, имеющего n-емкость нуль. Тогда

$$H(f(x)) \equiv 0,$$

всюду в $\mathbb{R}^n \setminus P$. В частности,

(а) если $H(t)$ - строго возрастает, то $f \equiv const$ при любом значении $n \geq 2$ и произвольном виде оператора $A(x;\xi)$;

(б) в специальном случае, когда

$$A_i(x;\xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

и выполнено $2 \leq n \leq 7$, $f(x)$ - линейная функция.

В п. 4.2 рассматриваются вопросы поведения решений (5) и средней кривизны $H(f(x))$ в различных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Определим от рытый слой

$$\Pi_{n,p} = \{ x \in \mathbb{R}^n : dist(x;\gamma^{n-p}) < R \},$$

где γ^{n-p} - $(n-p)$-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $R>0$.

Теорема 4.3. Пусть Ω совпадает с некоторой из областей $\Pi_{n,p}$. Тогда, для решения $f(x)$ уравнения (5) в области Ω выполнено

$$\sup_{x \in \Omega} |H(f(x))| \cdot dist(x;\partial\Omega) \leq \frac{p}{n},$$

и равенство достигается, например, когда $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\sqrt{R^2-\operatorname{dist}^2(x,\gamma^{n-p})}\,.$$

В п. 4.3 приводится пример, показывающий, что даже в случае компактной области Ω, имеющей вид единичного шара B в $\mathbb{R}^n$, существует решение $f(x)$ уравнения (5) для которого $|H(f(x))|\to\infty$ при произвольном приближении x к границе области ∂B. Приводимое далее утверждение показывает, что изолированная особенность устранима в слабом смысле. А именно, если $q\in\Omega$ – некоторая точка произвольной области Ω и $f(x)$ – решение (5) в области $\Omega\setminus\{q\}$, то $|H(f(x))|$ – ограничена в окрестности q, причем выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{x\to q}}\,|H(f(x))|\le\frac{1}{\operatorname{dist}(q,\partial\Omega)}.$$

В заключительном пункте рассматриваются вопросы о целых т.е. определенных всюду в $\mathbb{R}^n$, решениях (5) без предположения монотонности функции $H(t)$ в правой части и в случае двух независимых переменных. Нетрудно заметить, что тогда существует обширное множество решений (5), например, произвольные радиально-симметрические функции или функции, описывающие цилиндрические поверхности. Из доказываемого в работе утверждения вытекает, в частности, что если поле вектор-градиента ∇f решения $f(x)$ уравнения (5) во всей плоскости выпускает одно направление и средняя кривизна графика решения не меняет знака, то сам график является цилиндрической поверхностью.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность моему научному руководителю профессору В.М.Миклюкову за постоянное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

I. Ткачев В.Г. Об одной теореме Ченга и Яо // XXII Всесоюзн.научн.студ.конф., Новосибирск, май I984 г.: Новосибирск, I984.- С. 66-68.

2. Миклюков В.М., Ткачев В.Г. О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Изв.вузов. Математика.- I987.- № 7. - С. 30-36.

3. Ткачев В.Г. Условие параболичности типа двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // Всесоюзн.конф. по геом.теории функций, г. Новосибирск, I8-20 окт. I988. - Новосибирск, I988.- с. IOI.

4. Миклюков В.М., Ткачев В.Г. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности// Матем. сборник. - Т. I80, № 9. - С. I278-I295.

5. Ткачев В.Г. Признак параболичности конформного типа двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // Всесоюзн.конф. по геом."в целом", Новосибирск, I987 г.: Новосибирск, I987.-С. II9.

6. Ткачев В.Г. Некоторые свойства решений уравнения типа капиллярности в областях из $\mathbb{R}^n$ // Тез. докл. УI научн.конф. ВолГУ, г.Волгоград, I989 г.: Волгоград, I989.- С.66.

Подписано к печати II.04.90 . МН 08531

Формат бумаги 60x84 I/I6. Объем I п.л.; 0,75 уч.- зд. л.

Заказ I05 Тираж I00 экз.

Отпечатано на ротопринте Института математики СО АН СССР.

630090 , Новосибирск , 90.